Aufgaben zu quadratischen Funktionen mit Parameter (1)

Aufgabe 1

Gegeben ist die reelle Funktionenschar: $f_a : \mapsto ax^2 - 4x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1.1 Geben Sie die Form der Graphen von f_a in Anhängigkeit von a an.
Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen.

1.2 Berechnen Sie die Nullstellen von f_a in Anhängigkeit von a. Für welche Werte von a gibt es zwei verschiedene Nullstellen, genau eine Nullstelle oder keine Nullstelle?

1.3 Zeigen Sie, dass kein Graph der Funktion f_a durch den Ursprung verläuft.

1.4 Setzen Sie a = 2 und bestimmen Sie die Nullstellen und den Scheitel von f_2.

Aufgabe 2

Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ haben folgende reellen Parabelscharen keine Nullstellen: $f_k : x \mapsto ....$

a) $kx^2 + 2x + 1$ b) $-x^2 + 2x + k$ c) $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 3k$ d) $-\frac{1}{4}kx^2 - 5x + 2$

e) $2x^2 + 3x + k + 5$ f) $kx^2 - 2kx + k$ g) $kx^2 - 2kx + k - 7$ h) $kx^2 - 2kx + k + 9$

Aufgabe 3

3.0 Wir betrachten nun noch einmal die drei Funktionen von Aufgabe 2f, 2g und 2h.
Die Funktionen werden nun mit f, g und h bezeichnet.

3.1 Berechnen Sie für die Funktion f die Koordinaten des Scheitels.

3.2 Vergleichen Sie die Funktionsterme von f und g und beschreiben Sie den Unterschied.
Wie wirkt sich dieser Unterschied auf die Graphen der beiden Funktionen aus ?
Wo müsste demnach der Scheitel von G(g) liegen.

3.3 Bestätigen Sie die Vermutung von 3.2 durch Rechnung.

3.4 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels von G(h)

Aufgabe 4

Gegeben sind die reellen Funktionen $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1$; sowie $g_k : x \mapsto -x + 2k$; $k \in \mathbb{R}$

4.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitels von G(f) , sowie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte.

4.2 Zeichnen Sie den Graphen G(f) für $-1 \leq x \leq 8$.

4.3 Beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen von g_k.

4.4 Berechnen Sie die Schnittpunkte von $G(g_k)$ mit den Koordinatenachsen.

4.5 Untersuchen Sie, für welchen Wert von k der Graph von g_k Tangente an die Parabel G(f) ist.

Aufgabe 5

Gegeben sei die reelle Scharfunktion $f_t : x \mapsto 2x^2 + tx + 2$; $t \in \mathbb{R}$.

5.1 Berechnen Sie die Nullstellen von f_t in Abhängigkeit von t.

5.2 Für welche $t \in \mathbb{R}$ besitzt f_t genau eine Nullstelle?

5.3 Geben Sie für t = 5 die Linearfaktorzerlegung von f_t an.

5.4 Bestimmen Sie t so, dass P(1; 2) auf dem Graphen liegt.

5.5 Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $G_{f\,2}$ und dem Graphen der Funktion h: $x \mapsto 0{,}5x + 1{,}5$.

5.6 Gegeben sei jetzt die reelle Funktion g mit $g(x) = -3x + r$; $r \in \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie rechnerisch, für welches r $G_{f\,5}$ und G_g genau einen gemeinsamen Punkt besitzen und geben Sie die Koordinaten dieses Punktes an. (Ergebnis: r = –6)
Zeichnen Sie $G_{f\,5}$ und G_g für r = –6 in ein kartesisches Koordinatensystem ein.